

**I. PROPOSITION - FONCTION PROPOSITIONNELLE – LES QUANTIFICATEURS :**

**A. PROPOSITION :**

**a. Définition :**

On appelle une proposition un énoncé mathématique ( texte mathématique ) qui a un sens pouvant être vrai ou faux ( mais pas les deux en même temps ). Et , on note souvent une proposition par les lettres P , Q ou R ..etc. .

**b. Valeur de vérité d'une proposition :** vraie ou bien fausse présente la valeur de vérité de la proposition

- Si la proposition est vraie on note V ou 1 .
- Si la proposition est fausse on note F ou 0 .
- Tableau de vérité d'une proposition est ci-contre

p
1
0

**c. Exemples :**

P « 2 est un nombre pair » proposition est vraie . Q « 2+3 =6 » proposition est fausse .  
 R « ABCD est un parallélogramme alors les diagonales se coupe on leur milieux » . proposition est vraie

**B. FONCTION PROPOSITIONNELLE**

**a. Définition :**

On appelle une fonction propositionnelle, tout énoncé contenant une variable x ou plusieurs variables ( x,y,z,... ) et qui appartient à des ensembles déterminé . on note P(x) ou P(x,y;z,...)

**b. Remarque :** si on remplace les variables par un élément de ces ensembles , la fonction propositionnelle devient une proposition .

**c. Exemple :**

- ❖  $A(x) : \ll \text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R} \text{ on a } \sqrt{x^2} = x \gg$  est une fonction propositionnelle .
  - si  $x = 2$  on obtient une proposition vraie .
  - si  $x = -3$  on obtient une proposition fausse .
- ❖  $A(x,y) : \ll \text{pour tout } x \text{ et } y \text{ de } \mathbb{R} \text{ on a } :|x+y|=|x|+|y| \gg$  est une fonction propositionnelle .
  - si  $x = 2$  et  $y = 5$  on obtient une proposition vraie .
  - si  $x = -2$  et  $y = 5$  on obtient une proposition fausse .

**C. les quantificateurs :**

**a. Quantificateur universel :** l'expression suivante « pour tout x de E la proposition Q(x) est vraie » . On la note : «  $\forall x \in E , Q(x)$  » .

- Le symbole  $\forall$  s'appelle quantificateur universel et il se lit : pour tout .. ou quel que soit ..
- Exemples : «  $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2} = |x|$  » . «  $\forall x \in \mathbb{R} , \forall y \in \mathbb{R} : |x+y| \leq |x|+|y|$  »

**b. Quantificateur existentiel:** l'expression suivante « il existe un x de E la proposition Q(x) est vraie » .

On la note : «  $\exists x \in E , Q(x)$  » .

- Le symbole  $\exists$  s'appelle quantificateur existentiel et il se lit : il existe .. .
- Exemples : «  $\exists x \in \mathbb{R} : x+4 \leq 3$  » . «  $\exists a \in \mathbb{R} , \exists b \in \mathbb{R} , \exists c \in \mathbb{R} : a^3 + b^3 = c^2$  » ( a = 1; b = 2, c = 3 )

**c. Le symbole  $\exists!$  :** l'expression suivante « il existe un unique x de E la proposition Q(x) est vraie » . On la note : «  $\exists! x \in E , Q(x)$  » .

- Exemple : «  $\exists! x \in \mathbb{R} : x+4 = 3$  »

**d. Remarques :**

- ❑ L'ordre des quantificateurs identiques ( **universel ou bien existentiel** ) ne change pas le sens de la fonction propositionnelle.
- ❑ L'ordre des quantificateurs non identiques ( **universel et existentiel** ) change le sens de la fonction propositionnelle.
- ❑ La négation du quantificateur :  $\forall$  est le quantificateur  $\exists$ .
- ❑ La négation du quantificateur :  $\exists$  est le quantificateur  $\forall$ .
- ❑ Les écritures suivantes sont équivalentes  $\forall x \in E, \forall y \in E$  ou  $\forall x, y \in E$  ou  $\forall (x, y) \in E \times E$ .
- ❑ Les écritures suivantes sont équivalentes  $\exists x \in E, \exists y \in E$  ou  $\exists x, y \in E$  ou  $\exists (x, y) \in E \times E$ .

**II. LES OPERATIONS SUR LES PROPOSITIONS :**

**01. La négation d'une proposition :**

**a. Définition :**

La négation d'une proposition P est la proposition qu'on note  $\bar{P}$  ou  $\neg P$  tel que les valeurs de vérité de P et  $\bar{P}$  sont **opposées** .

**b. Exemple :** P « 2 est un nombre pair » sa négation est  $\bar{P}$  « 2 est un nombre impair »

**c. Tableau de vérité la négation d'une proposition :**

p	$\bar{p} = \neg p$
1	0
0	1

**d.**

Propriété :  $\bar{\bar{p}} = p$  ou encore  $\neg(\neg p)$  .

**02. La conjonction de deux propositions - La disjonction de deux propositions .**

**A. La conjonction de deux propositions :**

**a. Définition :**

La conjonction de deux propositions P et Q est la proposition notée  $P \wedge Q$  ou bien P et Q ; et elle est vraie seulement dans le cas où P et Q sont toutes les deux vraie .

**b. Tableau de vérité de  $P \wedge Q$  est :**

p	q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

**c. Exemple :**

- $(2 \text{ est un nombre pair}) \wedge (2+3=6)$  est une **proposition fausse**.
- $(2 \text{ est un nombre pair}) \wedge (2+3=6)$  ou encore  $(2 \text{ est un nombre pair}) \text{ et } (2+3=6)$

**B. La disjonction de deux propositions :**

**a. Définition :**

La disjonction de deux propositions P et Q est la proposition notée  $P \vee Q$  ou bien P ou Q ; et elle est fausse seulement dans le cas où P et Q sont toutes les deux fausses .

**b. Tableau de vérité de  $P \vee Q$  est :**

p	q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

**c. Exemple :**

- $(2 \text{ est un nombre pair}) \vee (2+3=6)$   
ou encore  $(2 \text{ est un nombre pair}) \text{ ou } (2+3=6)$
- $(2 \text{ est un nombre pair}) \vee (2+3=6)$  est une **proposition vraie** .

**d. Propriétés :**

• La conjonction et la disjonction sont **commutatives** :  $P \wedge Q = Q \wedge P$  ;  $P \vee Q = Q \vee P$

- La conjonction et la disjonction sont **associatives** :  
 $(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$  ;  $(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$ .
- La **négation** de la conjonction et la **négation** de la disjonction :  
 ❖  $\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$  ou bien  $\overline{P \wedge Q} = \overline{P} \vee \overline{Q}$   
 ❖  $\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$  ou bien  $\overline{P \vee Q} = \overline{P} \wedge \overline{Q}$
- La conjonction est **distributive sur** la disjonction - La disjonction est **distributive sur** la conjonction  
 ❖  $P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$  de même  $(Q \vee R) \wedge P = (Q \wedge P) \vee (R \wedge P)$  .  
 ❖  $P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$  de même  $(Q \wedge R) \vee P = (Q \vee P) \wedge (R \vee P)$  .

**e. Remarque :**

- $P \wedge P = P$  de même  $P \vee P = P$ .

**03. L'implication de deux propositions :**

**a. Définition :**

l'implication de deux propositions P puis Q est la proposition  $\overline{P} \vee Q$  ; qu'on note par  $P \Rightarrow Q$  on lit P implique Q .

**b. Tableau de vérité de  $P \Rightarrow Q$  est :**

**c. Remarque :**

- La proposition P s'appelle les données ( ou hypothèses ) de l'implication.
- La proposition Q s'appelle la conclusion de l'implication.
- L'implication  $P \Rightarrow Q$  est fausse seulement dans le cas P est vraie et Q est fausse .
- L'implication  $Q \Rightarrow P$  s'appelle l'implication réciproque de l'implication  $P \Rightarrow Q$  ( vis versa )
- L'implication  $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$  s'appelle la contre posée de l'implication  $P \Rightarrow Q$ .
- Si  $P \Rightarrow Q$  on n'a pas forcément  $Q \Rightarrow P$  .

p	q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

**d. Exemple :**

- $\underbrace{(2 \text{ est un nombre pair})}_{\text{vraie}} \Rightarrow \underbrace{(2 + 3 = 6)}_{\text{fausse}}$  est une **proposition fausse**.
- $\underbrace{(2 + 3 = 6)}_{\text{fausse}} \Rightarrow \underbrace{(2 \text{ est un nombre pair})}_{\text{vraie}}$  est une **proposition vraie** .

**e. Propriétés :**

- L'implication est transitive :  $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ .
- La négation de l'implication :  $\neg(P \Rightarrow Q) = \overline{P \Rightarrow Q} = P \wedge \overline{Q}$ .
- La contraposée :  $P \Rightarrow Q = \overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$

**04. L'équivalence de deux propositions :**

**a. Définition :**

l'équivalence de deux propositions P et Q est la proposition  $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$  note par  $P \Leftrightarrow Q$  on lit P est équivalente à Q ou bien P si et seulement si Q .

**b. Tableau de vérité de  $P \Leftrightarrow Q$  est :**

p	q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

c. Exemple :  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x^2 = y^2 \Leftrightarrow (x = y \text{ ou } x = -y)$

d. Propriétés :

- $(P \Leftrightarrow Q) = (Q \Leftrightarrow P) ; (P \Leftrightarrow Q) = (\bar{P} \Leftrightarrow \bar{Q}) .$
- $\overline{(P \Leftrightarrow Q)} = (\overline{P \Rightarrow Q}) \wedge (\overline{Q \Rightarrow P}) = (P \wedge \bar{Q}) \vee (Q \wedge \bar{P})$
- L'équivalence est transitive :  $[(P \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow R)] \Rightarrow (P \Leftrightarrow R)$

### 05. Lois logiques :

a. Définition :

Une loi logique est une proposition qui est vraie quel que soit la vérité des propositions qui la constitue .

b. Exemple :

- Lois de Morgan :  $\overline{P \wedge Q} = \bar{P} \vee \bar{Q} ; \overline{P \vee Q} = \bar{P} \wedge \bar{Q} .$
- $(P \wedge Q) \Rightarrow P .$  Preuve :  $((P \wedge Q) \Rightarrow P) \Leftrightarrow \overline{(P \wedge Q)} \vee P$   
 $\Leftrightarrow (\bar{P} \vee \bar{Q}) \vee P$   
 $\Leftrightarrow \underbrace{(\bar{P} \vee P)}_{\text{vraie}} \vee \bar{Q}$   
est toujours vraie

Donc  $(\bar{P} \vee P) \vee \bar{Q}$  est toujours vraie d'où  $(P \wedge Q) \Rightarrow P$  est une loi logique .

### III. TYPES DE RAISONNEMENTS :

#### 01. Raisonnement par contre exemple :

a. Définition :

Pour prouver que la propriétés suivante est fausse :  $\forall x \in E , P(x)$  il suffit de prouver que  $\exists x \in E , \bar{P}(x)$  est vraie ( c.à.d. de trouver un élément x de E qui ne vérifie pas  $P(x)$  ce qu'on appelle un contre exemple ).  
 Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par contre exemple .

b. Exemple : est ce que la somme de deux nombres irrationnelle est un nombre irrationnelle ?

$\sqrt{2}$  et  $-\sqrt{2}$  sont deux nombres irrationnelle mais leur somme  $-\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$  n'est pas un nombre irrationnelle

#### 02. Raisonnement par des équivalences successives :

a. Définition :

Pour démontrer que l'équivalence suivant  $P \Leftrightarrow Q$  est vrai , on démontrer que :  $P \Leftrightarrow Q_1$  et  $Q_1 \Leftrightarrow Q_2$  et  $Q_2 \Leftrightarrow Q_3$  et ..... et  $Q_n \Leftrightarrow Q$ .  
 Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par des équivalences successives .

b. Exemple : montrer que  $\forall a, b \in \mathbb{R} : a^2 + b^2 = 2ab \Leftrightarrow a = b .$

$$\begin{aligned} \text{On a : } a^2 + b^2 = 2ab &\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab = 0 \\ &\Leftrightarrow (a - b)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow a - b = 0 \\ &\Leftrightarrow a = b \end{aligned}$$

Conclusion :  $\forall a, b \in \mathbb{R} : a^2 + b^2 = 2ab \Leftrightarrow a = b$

### 03. Raisonnement déductif :

#### a. Définition :

Si on a l'implication  $P \Rightarrow Q$  est vraie et on a dans un exercice comme donnée la proposition P donc on déduit que la proposition Q est vraie .

Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par **dédution** .

#### b. Exemple :

1. On suppose qu'on a démontré :  $\forall a, b > 0, \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$  .

2. On déduit que :  $\forall x > 0, 2\sqrt{x} \leq 1+x$

D'après la 1<sup>ère</sup> question on pose  $a = 1$  et  $b = x$  d'où  $\sqrt{1 \times x} \leq \frac{1+x}{2}$  donc  $2\sqrt{x} \leq 1+x$

**Conclusion :**  $\forall x > 0, 2\sqrt{x} \leq 1+x$

### 04. Raisonnement par la contraposée :

#### a. Définition :

Pour démontrer l'implication suivante  $P \Rightarrow Q$  il suffit de démontrer l'implication suivante  $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$  .

Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par la contraposée .

#### b. Exemple : montrer que $\forall x, y \in ]2, +\infty[ , x \neq y \Rightarrow x^2 - 4x \neq y^2 - 4y$ .

On utilise un raisonnement par contraposée pour cela on démontre :

$$\forall x, y \in ]2, +\infty[ , x^2 - 4x = y^2 - 4y \Rightarrow x = y .$$

Soient x et y de  $]2, +\infty[$  tel que  $x^2 - 4x = y^2 - 4y$  .

$$x^2 - 4x = y^2 - 4y \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = y^2 - 4y + 4$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 = (y-2)^2$$

$$\Rightarrow x-2 = y-2 \text{ et } x-2 = -(y-2)$$

$$\Rightarrow x = y \text{ et } x+y-4 = 0$$

$$\Rightarrow x = y$$

$x+y-4=0$  est impossible car  $x > 2$  et  $y > 2$  d'où  $x+y > 4$  ou encore  $x+y-4 > 0$  .

Donc  $x^2 - 4x = y^2 - 4y \Rightarrow x = y$  est une implication vraie c.à.d. l'implication contraposée est vraie

**Conclusion :**  $\forall x, y \in ]2, +\infty[ , x \neq y \Rightarrow x^2 - 4x \neq y^2 - 4y$

### 05. Raisonnement par disjonction des cas :

#### a. Définition :

Lorsqu'on utilise plusieurs cas dans une démonstration le raisonnement utilisé s'appelle raisonnement par **disjonction des cas** .

#### b. Exemple : résoudre l'équation suivante $x \in \mathbb{R} : |x+1| + 2x = 0$ .

L'équation s'écrit aussi  $x \in ]-\infty, -1] \cup [-1, +\infty[ : |x+1| + 2x = 0$

1<sup>er</sup> cas  $x \in ]-\infty, -1]$

$$|x+1| + 2x = 0 \Leftrightarrow -(x+1) + 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \notin ]-\infty, -1]$$

D'où :  $S_1 = \emptyset$  .

2<sup>ème</sup> cas  $x \in [-1, +\infty[$  .

$$|x+1| + 2x = 0 \Leftrightarrow (x+1) + 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \in [-1, +\infty[$$

Donc :  $S_2 = \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$  .

**Conclusion :**  $S = S_1 \cup S_2 = \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$  .

## 06. Raisonnement par absurde :

### a. Définition :

Pour démontrer qu'une proposition Q (conclusion ou résultat) et on a parmi les données la proposition P

- On suppose que  $\bar{Q}$  ( la négation du conclusion ) est vraie et au cour de la démonstration on obtient que  $\bar{P}$  est vraie d'où P et  $\bar{P}$  sont vraies ce qui est impossible .
- Donc notre supposition  $\bar{Q}$  est vraie est absurde ; d'où Q est vraie .
- Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par **absurde** .

### b. Exemple : soient r est un nombre rationnelle et i est nombre irrationnelle et $s = r + i$ .

Montrer que : s est un nombre irrationnelle .

O suppose que s est un nombre rationnelle .

On a  $s = r + i \Leftrightarrow i = s - r$

- d'où  $s - r$  est un nombre rationnelle (1) car la somme de rationnelles est un nombre rationnelle .
- $i = s - r$  et i est nombre irrationnelle (2) .
- D'après (1) et (2) on a une contradiction d'où la supposition ( s est un nombre rationnelle ) est fausse

**Conclusion :** la somme d'un nombre rationnelle r et un nombre irrationnelle i est un nombre irrationnelle .

## 07. Raisonnement par récurrence :

### a. Définition :

Soient  $n_0 \in \mathbb{N}$  et  $P(n)$  une relation portant sur les entiers naturels n tel que  $n \geq n_0$  .

Pour démontrer que la relation  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \geq n_0$  . On utilise les étapes suivantes :

- On vérifie que :  $P(n)$  est vraie pour  $n = n_0$  ( c.à.d.  $P(n_0)$  est vraie ) .
- On suppose que :  $P(n)$  est vraie pour n avec  $n \geq n_0$  .la supposition s'appelle hypothèse de récurrence
- On démontre que : la relation  $P(n)$  est vraie pour  $n + 1$  ( c.à.d.  $P(n + 1)$  est vraie )
- Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par **récurrence**

**b. Exemple :** montrer que : pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  on a 3 divise  $n^3 - n$  ( c.à.d.  $3 | (n^3 - n)$  (1))

Remarque :  $3 | (n^3 - n) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} / n^3 - n = 3k$

- On vérifie que la relation (1) est vraie pour  $n = 0$  .  
Pour  $n = 0$  on a  $n^3 - n = 0^3 - 0 = 0 = 3 \times 0$  donc  $3 | (0^3 - 0)$  d'où la relation (1) est vraie pour  $n = 0$
- On suppose que : la relation (1) est vraie pour  $n$  ( et  $n$  de  $\mathbb{N}$  ) c.à.d.  $3 | (n^3 - n)$  , ( ou  $\exists k \in \mathbb{N} / n^3 - n = 3k$  ) . **hypothèse de récurrence**
- On démontre que : la relation (1) est vraie pour  $n + 1$  ( c.à.d.  $3 | ((n+1)^3 - (n+1))$  est vraie )

$$\begin{aligned} \text{On a : } (n+1)^3 - (n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 \\ &= n^3 - n + 3n^2 + 3n \\ &= 3k + 3(n^2 + n) && \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= 3(k + n^2 + n) \\ &= 3K && \text{(K = k + n^2 + n \in \mathbb{N})} \end{aligned}$$

Donc :  $(n+1)^3 - (n+1) = 3K$  par suite  $3 | ((n+1)^3 - (n+1))$

D'où la relation (1) est vraie pour  $n + 1$ .

**Conclusion**  $\forall n \in \mathbb{N} : 3 | (n^3 - n)$

**08.** Symboles  $\sum$  et  $\prod$  et les lettres grecque :

**a.** Symbole  $\sum$  :

La somme suivante :  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$  on la note par  $\sum_{i=1}^{i=n} a_i$  ( on utilise  $i$  ou  $j$  ou  $k$  sont des variables muettes )

- Exemple 1 :  $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = \sum_{i=1}^{i=n} 2i$  ( cet une somme qui est constitué par  $n + 1$  termes ) .
- Exemple 2 :  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = \sum_{i=0}^{i=n} (2i + 1)$  ( cet une somme qui est constitué par  $n$  termes ) .
- Propriétés :
  - ❖  $\sum_{j=0}^{j=n} (a_j + b_j) = \sum_{j=0}^{j=n} a_j + \sum_{j=0}^{j=n} b_j = \sum_{k=0}^{k=n} a_k + \sum_{k=0}^{k=n} b_k$  .
  - ❖  $\sum_{j=1}^{j=n} (a_j + c) = \sum_{j=1}^{j=n} a_j + nc$  ( car la somme contient  $n$  termes et chaque terme est  $a_j + c$  ) .

**b.** Symbole  $\prod$  :

Le produit suivant :  $a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_n$  on la note par  $\prod_{j=1}^{j=n} a_j$  ( on utilise  $i$  ou  $j$  ou  $k$  sont des variables muettes )

- Exemple 1 :  $\sum_{j=0}^{j=n} (a_j + b_j) = \prod_{j=0}^{j=n} a_j \times \prod_{j=0}^{j=n} b_j = \prod_{k=0}^{k=n} a_k \times \prod_{k=0}^{k=n} b_k$  ( cet un produit qui est constitué par  $n + 1$  termes ) .
- Exemple 2 :  $\prod_{j=1}^{j=n} (ca_j) = c^n \prod_{j=1}^{j=n} a_j$  ( cet un produit qui est constitué par  $n$  termes et chaque terme est  $c \times a_i$  ) .

**c. Exercices :**

Montrer que :

1.  $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$  .
2.  $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{i=1}^{i=n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  .
3.  $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \sum_{i=1}^{i=n} i^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$  .

**d. Les lettres grecque :**

ν	nu	α	alpha
ξ	xi	β	beta
ο	omicron	γ ou Γ	gamma
π ou Π	pi	δ ou Δ	delta
ρ	rho	ε	epsilon
σ ou Σ	sigma	ζ	zêta
τ	tau	η	êta
υ	upsilon	θ ou Θ	thêta
φ ou Φ	phi	ι	iota
χ	chi	κ	kappa
ψ ou Ψ	psi	λ ou Λ	lambda
ω ou Ω	oméga	μ	mu